1.4 向量丛与联络

1.4.1 向量丛

之前我们每次为切丛 TM, 余切丛 T^*M 和外代数丛 Λ^*T^*M 给出定义的流程都是相似的。现在我们将它们相同的部分抽象出来, 统一成一种形式——向量丛.

定义 1.4.1 (转移函数)**.** 设 $\{U_\alpha\}$ 是 M 的一个开覆盖, 开集之间的转移函数 (或过渡函数, transition function) 定义为一族连续映射 $\{\Psi_{\alpha\beta}: U_\alpha \cap U_\beta \to GL(m,\mathbb{R})\}$, s.t. 若 $U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma \neq \emptyset$, 则在 $U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$ 上有 $\Psi_{\gamma\beta} \circ \Psi_{\beta\alpha} = \Psi_{\gamma\alpha}$, 且 $\Psi_{\alpha\beta} = \Psi_{\beta\alpha}^{-1}$.

定义 1.4.2 (等价关系 '$\sim$')**.** 定义 $\sqcup_\alpha(U_\alpha \times \mathbb{R}^m)$ 上的等价关系 '$\sim$' 为

$$\begin{aligned}(x,(b_1^\alpha,b_2^\alpha,\cdots,b_m^\alpha)) \in U_\alpha \times \mathbb{R}^m &\sim (x,(b_1^\beta,b_2^\beta,\cdots,b_m^\beta)) \in U_\beta \times \mathbb{R}^m \\ \Leftrightarrow x = y,\ \text{且}(b_1^\beta,b_2^\beta,\cdots,b_m^\beta) &= (b_1^\alpha,b_2^\alpha,\cdots,b_m^\alpha) \cdot \Psi_{\alpha\beta}(x).\end{aligned}$$

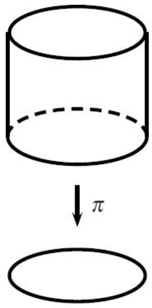
定义 1.4.3 (向量丛)**.** $E := \sqcup_\alpha(U_\alpha \times \mathbb{R}^m)/\sim$ 称为 M 上的一个 m 维实向量丛 (vector bundle). 定义投影映射 $\pi : E \to M$, $(x,v) \to x$. 此时 E 称为全空间 (total space), M 称为底空间 (base space).

例 1.4.4 (平凡向量丛)**.** 令 $E = M \times \mathbb{R}^m$, $\pi : E \to M$ 为向第一个分量的投影，则 E 是 M 上的一个 m 维向量丛，称为平凡向量丛

例 1.4.5 (切丛与余切丛)**.** 令 $\{U_\alpha\}$ 为 M 的微分结构对应的开覆盖，由 (1.30) 式，若 $\Psi_{\alpha\beta} = \left(\frac{\partial\phi^l_{\beta\alpha}}{\partial x^k_\alpha}\right)_{(k,l)}$, 则对应的向量丛为切向量丛；若 $\Psi_{\alpha\beta} = \left(\left(\frac{\partial\phi^l_{\beta\alpha}}{\partial x^k_\alpha}\right)^T_{(k,l)}\right)^{-1}$, 则对应的向量丛为余切向量丛。

与切向量丛类似，E 由等价关系 '$\sim$' 定义了一个拓扑, 从而也是一个拓扑空间. 实际上, 我们可以继续得出 E 是一个拓扑流形. 如果我们进一步假设对所有的 $\Psi_{\beta\alpha} \in C^\infty$, 则 E 本身是一个光滑微分流形。

下图为 S^1 上的 1 维向量丛



定义 1.4.6. 定义 $C^\infty(M,E) := \{光滑映射 s: M \to E | \pi \circ s = \mathrm{Id}_M\}$(有些书中记作 $\Gamma(E)$). 对 $\forall s \in C^\infty(M,E)$, 我们将 s 称为 E 的一个截面 (section).

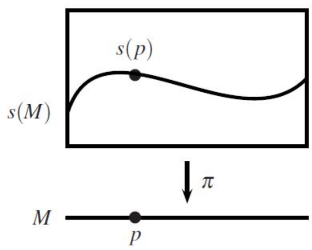
例 1.4.7 (平凡向量丛的截面)**.** 若 $E = M \times \mathbb{R}^m$ 为平凡向量丛，光滑映射 $s : M \to M \times \mathbb{R}^m$ 是截面当且仅当

$$s(x) = (p, f(p)), \quad p \in M,$$

其中 $f : M \to \mathbb{R}^m$ 是 M 上的向量值光滑函数.

所以，截面是向量值函数在流形上的推广。由向量丛的定义，局部上向量丛都是平凡的。在 U_α 上，$s|_{U_\alpha}$ 可看作一个取值在 $\mathbb{R}^m$ 中的 U_α 上的光滑函数。设 s_k^α 为 $\mathbb{R}^m$ 中的一组基，则 $s|_{U_\alpha}$ 可写作 $s|_{U_\alpha} = \sum_{k=1}^m f_k^\alpha s_k^\alpha$.

下图为截面的示意图



习题如果所有的 $\Psi_{\alpha\beta} \in C^\infty$, 则向量丛 E 本身是一个光滑微分流形。

设 E, F 是 M 上的两个向量丛, 且定义在同一个开覆盖 $\{U_\alpha\}$ 上 (若定义在不同的开覆盖 $\{U_\alpha\}, \{V_\beta\}$ 上, 则取并 $\{U_\alpha \cap V_\beta\}$). 定义转移函数 $\{\Psi^E_{\alpha\beta} : U_\beta \cap U_\alpha \to GL(M,\mathbb{R})\}$, $\{\Psi^F_{\alpha\beta} : U_\beta \cap U_\alpha \to GL(M,\mathbb{R})\}$ 分别为 E, F 上的转移函数.

我们可通过类比 $TM, T^*M, \Lambda^k T^*M$ 构造新向量丛:

1. $E \oplus F$, $m + m'$ 维, 转移函数 $\Psi^E_{\alpha\beta} \oplus \Psi^F_{\alpha\beta}$;

2. $E \otimes F$, $m \times m'$ 维, 转移函数 $\Psi^E_{\alpha\beta} \otimes \Psi^F_{\alpha\beta}$;

3. E^*, m 维, 转移函数 $((\Psi^E_{\alpha\beta})^{-1})^T$;

4. $\Lambda^k E$, C_m^k 维, 转移函数 $\Lambda^k \Psi^E_{\alpha\beta}$.

以上构造的新向量丛均满足 1.4.1节的定义.
注: 矩阵的张量乘法:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}\begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mm} \end{pmatrix} & \cdots & a_{1n}\begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mm} \end{pmatrix} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}\begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mm} \end{pmatrix} & \cdots & a_{nn}\begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mm} \end{pmatrix} \end{pmatrix}_{mn\times mn}. \tag{1.90}$$

1.4.2 微分几何常用记号

流形 M 上的 (r,s) 型张量丛有如下定义,

$$T_s^r := \underbrace{TM\otimes\cdots\otimes TM}_{\text{r 个}}\otimes\underbrace{T^*M\otimes\cdots\otimes T^*M}_{\text{s 个}},$$

其中 r 称为反变阶数, s 称为协变阶数.

就像曲面时一样，我们称 $\{\frac{\partial}{\partial x^1},\cdots,\frac{\partial}{\partial x^n}\}$ 为 TM 的一个局部自然标架，或一组基。同理，可称 $\{dx^1,\cdots,dx^n\}$ 为 T^*M 的一个局部自然标架或一组基。

所以，在局部上, T_s^r 的基为 $\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}\otimes\frac{\partial}{\partial x^{i_2}}\otimes\cdots\otimes\frac{\partial}{\partial x^{i_r}}\otimes dx^{j_1}\otimes dx^{j_2}\otimes\cdots\otimes dx^{j_s}$, $1\le i_1,\cdots,i_r,j_1,\cdots,j_s\le n$. 对 $\forall S\in C^\infty(M,T_s^r)$, 由 1.4.1节的定义, S 为 T_s^r 的一个截面, 在局部上其表示为

$$S = a^{i_1 i_2\cdots i_r}_{j_1 j_2\cdots j_s}\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}\otimes\frac{\partial}{\partial x^{i_2}}\otimes\cdots\otimes\frac{\partial}{\partial x^{i_r}}\otimes dx^{j_1}\otimes dx^{j_2}\otimes\cdots\otimes dx^{j_s},$$

我们称 S 为一个 (r,s) 型张量.

此外, 我们还经常记

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha^k} = \frac{\partial x_\beta^l}{\partial x_\alpha^k}\cdot\frac{\partial}{\partial x_\beta^l},$$

与

$$dx_\alpha^k = \frac{\partial x_\alpha^k}{\partial x_{\beta^l}}dx_\beta^l. \tag{1.91}$$

1.4.3 联络——截面的微分

前两个小节, 我们推广了切丛、余切丛和外代数丛, 定义了一般意义上的向量丛, 并指出向量丛的截面是多元函数的推广。我们现在来考察如何对截面求导。

取 E 的光滑截面 $s \in C^\infty(M,E)$, 那么在局部上,

$$s|_{U_\alpha} = \sum_{k=1}^{m} f_k^\alpha s_k^\alpha. \tag{1.92}$$

由定义, 在 $U_\alpha \cap U_\beta$ 上, 有

$$(f_1^\alpha, f_2^\alpha, \cdots, f_m^\alpha) = (f_1^\beta, f_2^\beta, \cdots, f_m^\beta)\Psi_{\beta\alpha}^E,$$

等式两边均右乘 $(s_1^\alpha, s_2^\alpha, \cdots, s_m^\alpha)^T$ 得

$$\begin{pmatrix} s_1^\beta \\ s_2^\beta \\ \vdots \\ s_m^\beta \end{pmatrix} = \Psi_{\beta\alpha}^E \begin{pmatrix} s_1^\alpha \\ s_2^\alpha \\ \vdots \\ s_m^\alpha \end{pmatrix}.$$

从而有一个自然的猜想, 定义 $ds|_{U_\alpha} = \sum_{k=1}^n (df_k^\alpha) s_k^\alpha$, 即对 s 求微分, 只需对系数 f_k^α 求微分. 由式 (1.92), 得到

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n (df_k^\alpha) s_k^\alpha =& (df_1^\alpha, df_2^\alpha, \cdots, df_m^\alpha) \begin{pmatrix} s_1^\alpha \\ s_2^\alpha \\ \vdots \\ s_m^\alpha \end{pmatrix} \\ =& (df_1^\beta, df_2^\beta, \cdots, df_m^\beta) \begin{pmatrix} s_1^\beta \\ s_2^\beta \\ \vdots \\ s_m^\beta \end{pmatrix} \\ &+ (f_1^\beta, f_2^\beta, \cdots, f_m^\beta)(d\Psi_{\beta\alpha}^E)(\Psi_{\beta\alpha}^E)^{-1} \begin{pmatrix} s_1^\beta \\ s_2^\beta \\ \vdots \\ s_m^\beta \end{pmatrix},\end{aligned} \tag{1.93}$$

最后一个式子的第二项在我们对 1-形式求导时出现过，当时我们引入外积解决了这个困难。但现在向量丛已经确定，无法修改, 我们只能从另一个角度（与向量场类似）修改 ds 的定义.

1.4.4 联络

定义 1.4.8 (联络)**.** 一个 E 上的联络 ∇^E 是一族算子, $\{d+A^\alpha | A^\alpha$是 U_α 上的 $m\times m$ 的 1-形式矩阵$\}$, 即 $A^\alpha=(a^\alpha_{ij})$, 其中 $a^\alpha_{ij}\in\Omega^1(U_\alpha)$, 满足在 $U_\alpha\cap U_\beta$ 上

$$A^\beta=\Psi^E_{\beta\alpha}A^\alpha(\Psi^E_{\beta\alpha})^{-1}+(d\Psi^E_{\beta\alpha})(\Psi^E_{\beta\alpha})^{-1}, \tag{1.94}$$

若 $s|_{U_\alpha}=\sum_{k=1}^n f^\alpha_k s^\alpha_k$,

$$A^\alpha\cdot s|_{U_\alpha}:=(f^\alpha_1,f^\alpha_2,\cdots,f^\alpha_m)A^\alpha\begin{pmatrix}s^\alpha_1\\ s^\alpha_2\\ \vdots\\ s^\alpha_m\end{pmatrix}.$$

此时

$$\begin{aligned}\nabla^E s|_{U_\alpha}&=(df^\alpha_1,df^\alpha_2,\cdots,df^\alpha_m)\begin{pmatrix}s^\alpha_1\\ s^\alpha_2\\ \vdots\\ s^\alpha_m\end{pmatrix}+(f^\alpha_1,f^\alpha_2,\cdots,f^\alpha_m)A^\alpha\begin{pmatrix}s^\alpha_1\\ s^\alpha_2\\ \vdots\\ s^\alpha_m\end{pmatrix}\\
&=(df^\beta_1,df^\beta_2,\cdots,df^\beta_m)\begin{pmatrix}s^\beta_1\\ s^\beta_2\\ \vdots\\ s^\beta_m\end{pmatrix}+(f^\beta_1,f^\beta_2,\cdots,f^\beta_m)(d\Psi^E_{\beta\alpha})(\Psi^E_{\beta\alpha})^{-1}\begin{pmatrix}s^\beta_1\\ s^\beta_2\\ \vdots\\ s^\beta_m\end{pmatrix}\\
&\quad+(f^\beta_1,f^\beta_2,\cdots,f^\beta_m)\Psi^E_{\beta\alpha}A^\alpha(\Psi^E_{\beta\alpha})^{-1}\begin{pmatrix}s^\beta_1\\ s^\beta_2\\ \vdots\\ s^\beta_m\end{pmatrix}\\
&=(df^\beta_1,df^\beta_2,\cdots,df^\beta_m)\begin{pmatrix}s^\beta_1\\ s^\beta_2\\ \vdots\\ s^\beta_m\end{pmatrix}+(f^\beta_1,f^\beta_2,\cdots,f^\beta_m)A^\beta\begin{pmatrix}s^\beta_1\\ s^\beta_2\\ \vdots\\ s^\beta_m\end{pmatrix}=\nabla^E s|_{U_\beta}.\end{aligned}\tag{1.95}$$

联络的定义解决了式 (1.93) 中的问题.

比起向量场的变换关系，(1.94) 的变换关系更加复杂，而且看起来不是很自然。但这个神秘的变换关系确实在自然中确实存在。在物理中，(1.94) 式称为规范变换。

从变换关系 (1.94) 可以看出, 联络的定义是合理的, 满足相容性, 即在 $U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$ 上, 如果 $A^\beta = \Psi^E_{\beta\alpha} A^\alpha (\Psi^E_{\beta\alpha})^{-1} + (d\Psi^E_{\beta\alpha})(\Psi^E_{\beta\alpha})^{-1}$, 和 $A^\gamma = \Psi^E_{\gamma\beta} A^\beta (\Psi^E_{\gamma\beta})^{-1} + (d\Psi^E_{\gamma\beta})(\Psi^E_{\gamma\beta})^{-1}$, 那么 $A^\gamma = \Psi^E_{\gamma\alpha} A^\alpha (\Psi^E_{\gamma\alpha})^{-1} + (d\Psi^E_{\gamma\alpha})(\Psi^E_{\gamma\alpha})^{-1}$.

注: 联络存在但不唯一, 因为 A^α 的选取不唯一.

习题 1.4.9. 对 $\forall s \in C^\infty(M, E)$, 证明 $\nabla^E s \in C^\infty(M, T^*M \otimes E)$.

定理 1.4.10. *向量丛 E 的一个联络 ∇^E 是一个线性映射*

$$\nabla^E : C^\infty(M, E) \to C^\infty(M, T^*M \otimes E),$$

满足:
(1) 对 $\forall s_1, s_2 \in C^\infty(M, E)$, 有 $\nabla^E(s_1 + s_2) = \nabla^E s_1 + \nabla^E s_2$,
(2) 对 $\forall f \in C^\infty(M)$, $s \in C^\infty(M, E)$, 有 $\nabla^E(fs) = df \otimes s + f\nabla^E s$.

在很多教材上, 这个定理即为联络的定义, 证明显然.

注: 当 $E = \Lambda^* T^* M$ 时, $\nabla^E \neq d$.

由定义可得

命题 1.4.11. *∇^E 有局部性, 即对 $\forall s_1, s_2 \in C^\infty(M, E)$, 开集 $U \subset M$, 若 $s_1|_U = s_2|_U$, 则 $\nabla^E s_1|_U = \nabla^E s_2|_U$.*

联络本质上是对截面求导, 首先我们回忆对光滑函数 $f \in C^\infty$ 求导, $X(f) = \langle df, X\rangle$, 类比定义对截面的求导为

$$\nabla^E_X s := \langle \nabla^E s, X\rangle. \tag{1.96}$$

对 $\forall k \in \mathbb{N}$, E 上的一个联络 ∇^E 可以推广到 $\Lambda^* T^* M \otimes E$ 上,

$$\nabla^E : C^\infty(M, \Lambda^k T^* M \otimes E) \to C^\infty(M, \Lambda^{k+1} T^* M \otimes E),$$

s.t. 对 $\forall \alpha \in C^\infty(M, \Lambda^q T^* M), s \in C^\infty(M, \Lambda^{k-q} T^* M \otimes E)$, 有

$$\nabla^E(\alpha \wedge s) = d\alpha \wedge s + (-1)^q \alpha \wedge \nabla^E s.$$